

---

# CÔNE NORMAL ET RÉGULARITÉS DE KUO-VERDIER

par Patrice Orro & David Trotman

---

**RÉSUMÉ.** — Nous introduisons de nouvelles régularités de Kuo-Verdier ( $r^e$ ) et montrons que pour une stratification  $C^2$  ( $a+r^e$ )-régulière, en particulier ( $w$ )-régulière, la fibre du cône normal le long d'une strate  $Y$  est égale au cône tangent à la fibre d'une rétraction sur  $Y$ . Ceci généralise le résultat analogue pour les stratifications sous-analytiques ( $b$ )-régulières démontré par J.-P. Henry et M. Merle [9], et aussi le résultat analogue pour les stratifications différentiables ( $w + \delta$ )-régulières démontré par nous-même [16]. Nous démontrons aussi l'ouverture de la projection du cône normal - appelée *pseudo-platitudo normale*.

**ABSTRACT.** — We introduce new Kuo-Verdier regularities ( $r^e$ ) and prove that for an ( $a+r^e$ )-regular (in particular for a ( $w$ )-regular)  $C^2$  stratification, the fibre of the normal cone along a stratum  $Y$  is equal to the tangent cone of the fibre of a retraction onto  $Y$ . This generalises the analogous result for ( $b$ )-regular subanalytic stratifications proved by J.-P. Henry and M. Merle [9], and also the analogous result for ( $w + \delta$ )-regular differentiable stratifications proved by the authors [16]. We further prove that the projection of the normal cone is open - one says then that the stratification is *normally pseudo-flat*.

## 1. Introduction

Dans la suite  $k$  est un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $\mathcal{Z}$  un fermé stratifié de  $\mathbb{R}^n$ , ayant pour strates des sous-variétés différentiables de classe  $C^k$ . Pour chaque strate  $Y$  de  $\mathcal{Z}$  on notera  $C_Y\mathcal{Z}$  le cône normal de  $\mathcal{Z}$  le long de  $Y$ , c'est à dire la restriction au-dessus de  $Y$  de l'adhérence de l'ensemble  $\{(x, \mu(x\pi(x))) : x \in \mathcal{Z} - Y\} \subset \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ , où  $\pi$  est la projection canonique locale sur  $Y$ , et  $\mu(x)$  le vecteur unitaire  $\frac{x}{\|x\|}$ . En fait  $C_Y\mathcal{Z}$  est la réunion des cônes normaux  $C_YX_i$ , où les  $X_i$  sont les strates de  $\mathcal{Z}$  adhérentes à  $Y$ .

L'objet principal de cette note est de préciser sous quelles hypothèses sur la stratification  $\mathcal{Z}$  les conditions suivantes sont vérifiées :

---

PATRICE ORRO, Laboratoire de Mathématiques (EP 2067), Université de Savoie, Campus scientifique, 73376 Le Bourget-du-Lac Cedex, France. • *E-mail* : orro@univ-savoie.fr

DAVID TROTMAN, Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités (UMR 6632), Université de Provence, Centre de Mathématiques et Informatique, 13453 Marseille, France. *E-mail* : trotman@gypsis.univ-mrs.fr

**Condition (n):** La fibre  $(C_Y \mathcal{Z})_y$  de  $C_Y \mathcal{Z}$  en un point  $y$  de  $Y$  est le cône tangent  $C_y(\mathcal{Z}_y)$  à la fibre  $\mathcal{Z}_y = \mathcal{Z} \cap \pi^{-1}(y)$  de  $\mathcal{Z}$  en  $y$ .

**Condition de pseudo-platitude normale (ppn):** La projection  $p : C_Y \mathcal{Z} \rightarrow Y$  est ouverte pour toute strate  $Y$  de  $\mathcal{Z}$ .

Nous rappelons au §2 les conditions de régularité usuelles, dont nous aurons besoin, en particulier la condition (a) de Whitney. Quand une stratification vérifie deux conditions, par exemple est (a)-régulière et (n)-régulière, nous dirons qu'elle est  $(a+n)$ -régulière, pour la simplicité des notations. Les stratifications sous-analytiques vérifiant les conditions  $(a+n)$  ou (ppn) ont un cône normal ayant un bon comportement du point de vue de la dimension des fibres. En effet elles vérifient la condition

$$\dim(C_Y \mathcal{Z})_y \leq \dim \mathcal{Z} - \dim Y - 1. \quad (*)$$

C'est évident pour  $(a+n)$ , et pour (ppn) cela résulte de (5.1.ii') (voir aussi [4], [5, lemme 2.4]). Pour des stratifications différentiables il y a le problème de savoir ce que c'est que la dimension.

Malgré cette limitation, le cône tangent  $C_y(\mathcal{Z}_y)$  à la fibre  $\mathcal{Z}_y = \mathcal{Z} \cap \pi^{-1}(y)$  (et donc la fibre  $(C_Y \mathcal{Z})_y$  du cône normal, supposant (n)) peut être assez arbitraire : des travaux récents de Ferrarotti, Fortuna et Wilson montrent que tout cône semi-algébrique fermé de codimension  $\geq 1$  est réalisé comme le cône tangent en un point d'une certaine variété algébrique réelle [6], et Kwiecinski et Trotman ont montré que *tout* cône fermé est réalisé comme le cône tangent en une singularité isolée d'un certain espace stratifié  $C^\infty(b)$ -régulier [13].

Les premiers résultats dans la direction de notre étude ont été obtenus par Hirsonaka, qui a montré dans [10] qu'une stratification de Whitney (i.e.(b)-régulière) d'un ensemble analytique (réel ou complexe) est normalement pseudo-platte le long de chaque strate. J.-P. Henry et M. Merle [9] ont montré l'assertion analogue à (n) avec  $\mathcal{Z}$  remplacé par  $X \cup Y$  quand  $X$  et  $Y$  sont deux strates adjacentes d'une stratification de Whitney sous-analytique de  $X \cup Y$ . Un exemple algébrique réel de [2] montre qu'il ne suffit pas en général que la stratification soit  $(a+\delta)$ -régulière.

Dans [16], nous avons étendu le résultat de Henry et Merle au cadre différentiable, avec l'hypothèse que la stratification vérifie les conditions (w) de Verdier et ( $\delta$ ) de Bekka-Trotman. Ici nous améliorons les résultats de [16] par un affaiblissement de la régularité imposée à la stratification. Nous montrons dans le théorème 3.1 que (n) est vérifiée par toute stratification différentiable (a)-régulière ayant en plus une régularité ( $r^e$ ), que nous introduisons ici.

Toute stratification  $C^2$  (w)-régulière vérifie automatiquement (a) et ( $r^e$ ), c'est-à-dire  $(a+r^e)$ . Pour des strates sous-analytiques la combinaison  $(a+r^e)$  est équivalente (proposition 2.5) au critère (r) introduit par T.-C. Kuo en 1971, ce qui entraîne la condition (b) de Whitney [12]; on sait depuis [18] que (r) est strictement plus faible que (w) dans le cas semi-algébrique, et il existe même des exemples algébriques réels

[3]. L'équivalence de (b), (r) et (w) pour les stratifications analytiques complexes est connue depuis 1982 ([17], [8]).

Nous montrons aussi, dans la proposition 5.2, la pseudo-platitude normale de toute stratification  $(a+r^e)$ -régulière. L'exemple 4.2 (un "escargot de Kuo", déjà utilisé par nous dans [15]) montre qu'une stratification différentiable (b)-régulière ne vérifie pas forcément (n) ou (ppn). A la fin du §5 nous décrivons des exemples semi-algébriques montrant qu'il n'y a pas d'implication entre les conditions (n) et (ppn), même en supposant la condition (a).

## 2. Définitions et résultats préliminaires

Nous rappelons d'abord les définitions des conditions (a) et (b) de Whitney, (r) de Kuo [12], (w) de Kuo-Verdier [20] et (δ) de Bekka-Trotman [1], [2].

Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  telles que  $Y \subset \overline{X}$ ,  $\pi$  la projection locale sur  $Y$ . Suivant Hironaka [10], nous notons par  $\alpha_{X,Y}(x)$  la distance de  $T_x X$  à  $T_{\pi(x)} Y$ , qui s'exprime par

$$\alpha_{X,Y}(x) = \max\{\langle \mu(u), \mu(v) \rangle : u \in N_x X - \{0\}, v \in T_{\pi(x)} Y\},$$

et par  $\beta_{X,Y}(x)$  la distance de  $x\pi(x)$  à  $T_x X$  exprimée par

$$\beta_{X,Y}(x) = \max\{\langle \mu(u), \mu(x)\pi(x) \rangle : u \in N_x X - \{0\}\},$$

où  $\langle, \rangle$  est le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .

Pour  $v \in \mathbb{R}^n$ , la distance du vecteur  $v$  à un plan  $B$  s'écrit

$$\eta(v, B) = \sup\{v \cdot n : n \in B^\perp, \|n\| = 1\}.$$

Posons

$$d(A, B) = \sup\{\eta(v, B) : v \in A, \|v\| = 1\}.$$

Posons encore

$$R_{X,Y}(x) = \frac{\|x\| \alpha_{X,Y}(x)}{\|x\pi(x)\|} \quad \text{et} \quad W_{X,Y}(x, z) = \frac{d(T_x X, T_z Y)}{\|x\pi(x)\|}.$$

Lorsque aucune confusion ne sera possible nous omettrons de préciser les indices  $X$  et  $Y$ .

**DÉFINITION 2.1.** — Le couple de strates  $(X, Y)$  vérifie en  $0 \in Y$  :

la condition (a) si, pour  $x$  dans  $X$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha_{X,Y}(x) = 0,$$

la condition (b) si, pour  $x$  dans  $X$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha_{X,Y}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \beta_{X,Y}(x) = 0,$$

la condition (r) si, pour  $x$  dans  $X$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} R_{X,Y}(x) = 0,$$

la condition (w) si, pour  $x$  dans  $X$  et  $y$  dans  $Y$ ,  $W_{X,Y}(x, y)$  est borné près de 0,

la condition (δ) si, pour  $x$  dans  $X$  et  $y$  dans  $Y$ , l'angle entre la droite  $xy$  et  $T_x X$  est borné, près de 0, par une constante  $\delta < \pi/2$ .

Dans cet article nous introduisons la condition ( $r^e$ ) suivante, de type Kuo-Verdier.

**DÉFINITION 2.2.** — Soit  $e \in [0, 1]$ . Nous dirons que  $(X, Y)$  vérifie la condition ( $r^e$ ) en  $0 \in Y$  si, pour  $x \in X$ , la quantité  $R_e(x) = \frac{\|\pi(x)\|^e \alpha_{X,Y}(x)}{\|x\pi(x)\|}$  est bornée près de 0.

Cette condition est invariante par difféomorphisme de classe  $C^2$ . Ce n'est autre que (w) quand  $e = 0$ , ainsi (w) implique ( $r^e$ ) pour tout  $e \in [0, 1]$ . Mais, contrairement à (w), la condition ( $r^e$ ) quand  $e > 0$  n'implique pas la condition (a) : on construit facilement un contre-exemple d'une surface semi-algébrique dans  $\mathbb{R}^3$  obtenue en pinçant un demi-plan  $\{z \geq 0, x = 0\}$ , de bord l'axe  $0y = Y$ , dans une région cuspidale  $\Gamma = \{x^2 + y^2 \leq z^p\}$ , où  $p$  est un entier impair tel que  $p > \frac{2}{e}$ , de telle façon que dans  $\Gamma$  il y ait des suites tendant vers 0 pour lesquelles la condition (a) ne soit pas vérifiée. On peut vérifier que cet exemple est ( $r^e$ )-régulier.

Il est bien souvent utile de savoir que l'intersection transverse de deux stratifications régulières est encore régulière, et nous aurons besoin de cette propriété pour la condition ( $a + r^e$ ) dans la preuve du théorème 3.1.

Une démonstration du fait que la condition (b) est préservée par intersection transverse était donnée par Gibson [7], pour la condition ( $a + \delta$ ) voir [1] ou [2]. Pour la condition (w) nous ne connaissons aucune référence : la propriété d'invariance ne semble pas avoir été énoncée sauf dans le cas d'une section par une variété lisse [20]. La démonstration du théorème suivant s'applique à toutes les conditions envisagées ci-dessus.

**THÉORÈME 2.3.** — *Les conditions (a), (b), (r), (w), ( $a + \delta$ ) et ( $a + r^e$ ) pour  $0 \leq e < 1$  sont invariantes par intersection transverse de deux stratifications de classe  $C^1$ .*

*Démonstration.* — Chaque cas se déduit de la preuve que nous donnons pour ( $a + r^e$ ). Considérons tout d'abord deux plans  $A$  et  $B$  transverses. Pour  $v \in \mathbb{R}^n$ , la distance du vecteur  $v$  à  $B$  s'écrit

$$\eta(v, B) = \sup\{v \cdot n : n \in B^\perp, \|n\| = 1\}.$$

La distance de  $v$  à  $A \cap B$  s'écrit donc

$$\eta(v, A \cap B) = \sup\{v \cdot n : n \in A^\perp + B^\perp, \|n\| = 1\}.$$

Décomposons  $A^\perp + B^\perp$  en  $I + U + V$  où  $I = A^\perp \cap B^\perp$ , et  $U$  (resp.  $V$ ) est le complémentaire orthogonal de  $I$  dans  $A^\perp$  (resp.  $B^\perp$ ). Alors

$$\eta(v, A \cap B) = \sup\{v \cdot (\sum_{i=1}^3 n_i) : n_1 \in I, n_2 \in U, n_3 \in V, \|\sum_{i=1}^3 n_i\| = 1\}.$$

Soient maintenant  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  deux stratifications transverses. Supposons que  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  vérifient une condition de régularité du type  $d(T_x S, T_y T) \leq \phi(x, y)$  pour une certaine fonction  $\phi$  donnée -  $S$  et  $T$  étant deux strates adjacentes de la stratification considérée,  $x$  un point de  $S$  et  $y$  un point de  $T$ .

Prenons deux strates  $X, Y$  de  $\Sigma$ , deux strates  $X', Y'$  de  $\Sigma'$  telles que  $Y < X$  et  $Y' < X'$ , un point  $x$  de  $X \cap X'$ , et un point  $y$  de  $Y \cap Y'$ .

En utilisant ce qui précède pour  $A = T_x X$  et  $B = T_x X'$ , si  $v \in T_y Y \cap T_y Y'$  nous avons que

$$\eta(v, A \cap B) \leq \sup\{\|\sum_{i=1}^3 n_i\| : n_1 \in I, n_2 \in U, n_3 \in V, \|\sum_{i=1}^3 n_i\| = 1\} \phi(x, y).$$

Comme

$$\|\sum_{i=1}^3 n_i\|^2 = \|n_1\|^2 + \|n_2\|^2 + \|n_3\|^2 + 2 \cos(n_2, n_3) \|n_2\| \|n_3\| = 1,$$

et  $\{\sum_{i=1}^3 \|x_i\|^2 + 2a \|x_2\| \|x_3\| = 1\}$  est compact pour  $\|a\| \neq 1$ , nous avons que

$$d(T_y Y \cap T_y Y', A \cap B) = \sup\{\eta(v, A \cap B) : v \in T_y Y \cap T_y Y', \|v\| = 1\} \leq C \phi(x, y),$$

où  $C = \sup\{\|\sum_{i=1}^3 x_i\| : \sum_{i=1}^3 \|x_i\|^2 + 2a \|x_2\| \|x_3\| = 1, \|a\| < 1 - \epsilon\}$ , et  $\epsilon$  est donné par l'angle minimal de  $T_x X$  et  $T_x X'$  sur un voisinage de  $y$ ;  $\epsilon$  étant non-nul par la (a) régularité de  $(X, Y)$  et de  $(X', Y')$  en  $y$  et la transversalité de  $Y$  et  $Y'$  en  $y$ . Ceci montre le résultat.  $\square$

LEMME 2.4. — Si (a) est vérifiée, et  $(r^e)$  a lieu pour un certain  $e \in [0, 1]$ , alors  $(r)$  est vérifiée.

Démonstration. — De  $(r^e)$  il résulte que  $\frac{\|\pi(x)\| \alpha(x)}{\|x\pi(x)\|} \leq C \|\pi(x)\|^{1-e}$ , et donc que

$$R(x) = \frac{\|\pi(x)\| \alpha(x)}{\|x\pi(x)\|} \frac{\|x\|}{\|\pi(x)\|} \rightarrow 0 \text{ parce que } e < 1, \text{ sauf éventuellement si } \frac{\|\pi(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0.$$

Mais dans ce cas  $(r)$  résulte de la condition (a).  $\square$

PROPOSITION 2.5. — Pour des strates sous-analytiques,  $(r)$  implique (a) et l'existence de  $e \in ]0, 1[$  tel que  $(r^e)$  soit vérifiée. Ainsi  $(r)$  devient équivalente à  $(a + r^e)$  pour un certain  $e$ ,  $0 < e < 1$ .

Démonstration. — Supposons que  $R(x) \rightarrow 0$ . On constate déjà que (a) est vérifiée, parce que

$$\frac{\|x\|}{\|x\pi(x)\|} \geq 1.$$

Par inégalité de Łojasiewicz, il existe  $\lambda > 0$  tel que  $R(x) \leq C \|x\|^\lambda$  et on peut évidemment supposer que  $0 < \lambda < 1$ . Puisque  $\frac{\|\pi(x)\|}{\|x\|}$  est borné par 1, on déduit

facilement que

$$R_{1-\lambda}(x) = \frac{\|\pi(x)\|^{1-\lambda} R(x)}{\|x\|^{1-\lambda} \|x\|^\lambda} \leq C$$

et donc  $(r^e)$  est vérifiée, avec  $e = 1 - \lambda$ . □

**REMARQUE 2.6.** — Clairement,  $(r^e)$  implique que  $R_f(x)$  tend vers 0 pour tout  $e < f < 1$ , et aussi que  $\|\pi(x)\|\alpha(x)/\|x\pi(x)\|$  tend vers 0. Dans le cas sous-analytique il est facile de voir, utilisant une inégalité de Łojasiewicz, que  $(r^e)$  est équivalente à ce que  $R_f(x)$  tend vers 0 pour un certain  $e < f < 1$ .

### 3. La fibre du cône normal

Dans cette section nous démontrons le résultat suivant:

**THÉOREME 3.1.** — *Soit  $\mathcal{Z}$  un fermé stratifié de manière  $(a + r^e)$ -régulière relativement à une strate  $Y$ . Alors  $C_y(\mathcal{Z}_y) = (C_Y \mathcal{Z})_y$ , pour tout point  $y$  de  $Y$ , c'est-à-dire que  $(n)$  est vérifiée.*

On déduit immédiatement le corollaire suivant, et on déduit aussi le théorème de [9], que  $(b)$  implique  $(n)$  pour des stratifications sous-analytiques, en remarquant que  $(r)$  est équivalente à  $(b)$  en dimension 1 pour des strates sous-analytiques [12], et en appliquant la Proposition 2.5 ci-dessus (cf. [9], [16]).

**COROLLAIRE 3.2.** — *Si  $\mathcal{Z}$  possède une stratification  $(a + r^e)$ -régulière de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , alors  $C_y(\mathcal{Z}_y) = (C_Y \mathcal{Z})_y$ , pour toute strate  $Y$  et pour tout point  $y$  de  $Y$ .*

Le corollaire 3.2 améliore le théorème 2.1 de [16], où nous avons obtenu la même conclusion utilisant une hypothèse plus forte : que la stratification soit  $(w + \delta)$ -régulière. Rappelons que  $(w)$  entraîne  $(a)$  et  $(r^e)$ ,  $\forall e \geq 0$ .

*Démonstration du théorème.* — L'inclusion  $C_y(\mathcal{Z}_y) \subset (C_Y \mathcal{Z})_y$  est évidente.

Soit  $v$  un élément de  $(C_Y \mathcal{Z})_y$ . Il existe une suite de points  $x_i \in \mathcal{Z}$  telle que la limite de  $\mu(x_i \pi(x_i))$  soit égale à  $v$ . Soit  $y_i$  le point  $\pi(x_i)$ . La suite de points  $x_i$  que l'on peut supposer se trouver sur une strate fixe  $X$  est telle que  $\mu(x_i \pi(x_i))$  tend vers  $v$ . On peut aussi supposer, quitte à extraire une sous-suite, que les  $y_i$  sont tracés sur  $\gamma$ , arc  $C^1$  et  $C^k$  en dehors de  $y$  (par le théorème d'extension  $C^1$  de Whitney comme dans [19]). Les tangentes à  $\gamma$  déterminent un champ de vecteurs  $C^{k-1}$  unité, noté  $\delta$ . Désignons par  $\mathcal{Z}_\gamma$  l'ensemble  $\mathcal{Z} \cap \pi^{-1}(\gamma)$  et par  $p_x$  la projection sur l'espace tangent à la strate de  $\mathcal{Z}_\gamma$  passant par  $x$ . Nous noterons  $\kappa$  la restriction de  $\pi$  à  $\mathcal{Z}_\gamma$ . Posant  $w_{\mathcal{Z}}(x) = p_x(\delta_{\kappa(x)}) \in T_x \mathcal{Z}_\gamma$ , en particulier  $w_{\mathcal{Z}}(x) = \delta_x$  pour  $x$  dans  $Y$ , on définit un champ de vecteurs  $C^{k-1}$  sur les strates de  $\mathcal{Z}_\gamma - \kappa^{-1}(y)$ , vérifiant

$$\|w_Z(x) - w_Z(\kappa(x))\| \leq C \frac{\|x\kappa(x)\|}{\|\kappa(x)\|^e} (**),$$

par invariance de  $(r^e)$  par intersection transverse (théorème 2.3). Grâce à la  $(a)$ -régularité,  $w_Z$  et  $\kappa_*(w_Z)$  ne s'annulent pas sur un voisinage de  $y$ . En posant  $v_Z = \frac{w_Z}{\|\kappa_*(w_Z)\|}$  on obtient un champ vérifiant encore  $(**)$  et  $\kappa_*(v_Z) = \delta$ . Ce champ de vecteurs n'est peut-être pas continu, mais il est intégrable sur chaque strate au dessus de  $\gamma - \{y\}$  :

LEMME 3.3. — *Chaque courbe intégrale du champ  $v_Z$  atteint  $\pi^{-1}(y) = \kappa^{-1}(y)$  sans arriver à  $y$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\phi$  une courbe intégrale de  $v_Z$ . Notons tout d'abord que le rapport  $\frac{\kappa(\phi(s))}{s}$  est borné, ce qui nous permet, quitte à modifier certaines constantes, de remplacer  $\kappa(\phi(s))$  par  $s$  dans les calculs qui suivent. La longueur d'une courbe intégrale de  $w_Z$ , sur un intervalle  $[a, b]$ , est majorée par  $\int_a^b (1 + C\|\kappa(\phi(s))\|^{-e}) ds$ , puisque

$$\|\delta - v_Z\| \leq C\|\phi\kappa(\phi)\|\|\kappa(\phi)\|^{-e},$$

et donc, est aussi majorée par  $(b - a) + C'(b^{1-e} - a^{1-e})$ . Ceci montre que les courbes intégrales atteignent  $\kappa^{-1}(y)$ . Pour montrer qu'elles n'atteignent pas  $y$ , posons  $f(t) = \|\phi(t)\kappa(\phi(t))\|$ . Alors

$$f' = \frac{(\kappa(\phi') - \phi', \phi\kappa(\phi))}{\|\phi\kappa(\phi)\|}.$$

Comme

$$\|\kappa(\phi') - \phi'\| = \|\delta - v_Z\| \leq C\|\phi\kappa(\phi)\|\|\kappa(\phi)\|^{-e}$$

on obtient que  $|\frac{f'}{f}| \leq C\|\kappa(\phi)\|^{-e}$  et, sur un intervalle  $[a, b]$ ,

$$f(t) \geq \exp(-C'b^{1-e} + \log(f(a))).$$

Puisque  $\phi$  atteint  $\kappa^{-1}(y)$  en un temps fini on a le résultat.  $\square$

LEMME 3.4. — *Le mouvement latéral des sécantes tend vers 0.*

*Démonstration.* — La valeur absolue de la variation  $\Delta(t_1, t_2)$  de la sécante sur l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  est

$$\|\Delta(t_1, t_2)\| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{ds} (\mu(\phi(s)\kappa(\phi(s)))) ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} 2 \frac{\|\kappa(\phi') - \phi'\|}{\|\phi\kappa(\phi)\|}.$$

Dans le lemme précédent on a vu que  $\|\kappa(\phi') - \phi'\| \leq C\|\phi\kappa(\phi)\|\|\kappa(\phi)\|^{-e}$ , et donc

$$\|\Delta(t_1, t_2)\| \leq 2C \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{s^e} = 2C(t_2^{1-e} - t_1^{1-e})$$

qui tend vers 0 avec  $t_1, t_2$ .  $\square$

**Fin de la démonstration du théorème 3.1 :**

Désignant par  $z_i$  le point d'intersection de la courbe intégrale passant par  $x_i$  avec  $\kappa^{-1}(y)$ ,

$$\|\mu(z_i\kappa(z_i)) - v\| \leq \|\mu(z_i\kappa(z_i)) - \mu(x_i\kappa(x_i))\| + \|\mu(x_i\kappa(x_i)) - v\|.$$

Chacune des quantités  $\|\mu(z_i\kappa(z_i)) - \mu(x_i\kappa(x_i))\|$  et  $\|\mu(x_i\kappa(x_i)) - v\|$  tend vers 0 d'après ce qui précède, d'où le théorème.  $\square$

**4. Exemples et remarques**

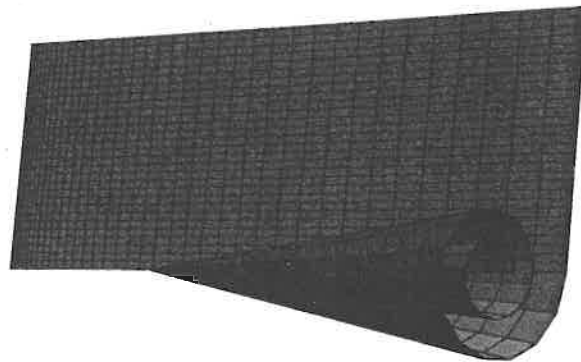
**REMARQUE 4.1.** — La condition  $(a + r^e)$  n'est pas nécessaire pour avoir la trivialité du cône normal. Pour un produit direct  $A \times \mathbb{R}$ , le cône normal est trivial le long de  $\mathbb{R}$ , sans que  $A$  ait de régularité particulière. Pire, il est possible que  $A$  vérifie  $(a + r^e)$  sans que  $A \times \mathbb{R}$  la vérifie [3]!

**EXEMPLE 4.2.** — **Un escargot de Kuo**, cf. [15].

Soit  $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^3$  le sous-ensemble suivant:

$$\mathcal{Z} = \{(r, \theta, z) : r = e^{-\theta^2/z^3} \text{ pour } z > 0, \quad y = 0, x \in [0, 1[ \text{ pour } z \leq 0\}.$$

La stratification donnée par  $Y = \mathbb{R}z$  et  $X = \mathcal{Z} - Y$  est  $(b)$ -régulière, et donc vérifie  $(\delta)$ , pour tout  $\delta > 0$ . Le long de l'axe des  $z$ , le cône normal est  $S^1$  pour  $z > 0$ , un point pour  $z \leq 0$ . Ainsi le résultat du théorème 3.1 n'est pas valable dans ce cas. Bien entendu l'exemple n'est pas sous-analytique. On peut noter aussi que le rapport  $\frac{d(T_x X, Y)}{d(x, Y)}$  est de l'ordre de  $\frac{1}{z^4}$  ce qui montre que l'on n'a pas  $(w)$  en 0. On constate enfin que la projection du cône normal de  $\mathcal{Z}$  le long de  $Y$  n'est pas ouverte au-dessus de  $O$ .



**Un escargot de Kuo**

**EXEMPLE 4.3.** — Soient  $m$  et  $r$  deux réels strictement positifs. Un *tumulus* ([11], [14]) de paramètres  $m$  et  $r$  centré en 0, est la surface de  $\mathbb{R}^3$ , notée  $T_{m,r}$  et donnée par

$$\{(x_1, x_2, x_3) : m^7 r^3 x_3 = (x_1^2 - m^2 r^2)^2 (x_2^2 - m^2)^2, |x_1| \leq mr, |x_2| \leq m\}.$$



Une propriété remarquable de ces tumuli est que lorsque  $m, r$  tendent vers 0 la structure normale tend vers

$$\{(-4\xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)^2, 0, 1) : \xi \in [-1, 1]\}.$$

Si l'on affaiblit  $(w)$  en  $(w_\beta), \beta < 1$ , c'est-à-dire si on suppose que le rapport  $\frac{d(T_x X, T_z Y)}{\|x\kappa(x)\|^\beta}$  est borné près de  $y$  pour  $x$  dans  $X$  et  $z$  dans  $Y$ , alors le résultat du corollaire 3.2 n'est pas conservé.

Considérons pour cela le demi-plan  $x_3 = 0, x_1 > 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et notons  $C_\alpha$  le morceau de courbe  $\{x_1 = x_2^{\frac{2+\alpha}{\alpha}}, x_1 > 0\}$ , qui est tangent à  $(0x_2)$ . Centrons aux points  $(x_1^i, x_2^i, 0) = (r_i^{1+\alpha}, r_i^{\frac{\alpha(1+\alpha)}{2+\alpha}}, 0)$  des tumuli  $T_{r_i^\alpha, r_i}$ , avec une suite  $r_i$  qui tend vers 0 de sorte que les tumuli soient disjoints.

Alors, si l'on note  $X$  le demi-plan perturbé le long de  $C_\alpha$  et  $Y = (0x_2)$ , on obtient une stratification  $(w_{\frac{1}{1+\alpha}})$ -régulière, pour laquelle le cône normal n'est pas obtenu dans la fibre. En effet, en notant  $\pi$  la projection sur  $Y$ , et en notant

$$\xi = \frac{x_1 - x_1^i}{r_i^{1+\alpha}} \quad \text{et} \quad \chi = \frac{x_2 - x_2^i}{r_i^\alpha}$$

sur les tumuli, nous avons que

$$\|x - \pi(x)\| \equiv \frac{3}{2}r_i^{1+\alpha}, \quad \text{et} \quad d(T_x X, Y) \equiv -4\chi(\chi^2 - 1)(\xi^2 - 1)^2 r_i,$$

de sorte que

$$\frac{d(T_x X, Y)}{\|x - \pi(x)\|^\beta} \leq \text{Cte}, \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{1+\alpha},$$

c'est-à-dire que la stratification obtenue est  $(w_\beta)$ -régulière. De plus les fibres du cône tangent le long de  $Y$  sont des points, sauf en 0 où l'on a une courbe, étant donné que l'angle des sécantes passant par le sommet des tumuli a une ouverture constante (la tangente de cet angle est  $\frac{2}{3}$ ). Il est clair par la construction que les limites des sécantes en 0 ne sont pas obtenues dans la fibre de  $\pi$ , c'est-à-dire que la condition (n) n'est pas vérifiée.

Dans les deux exemples précédents, les strates telles qu'elles sont données sont de classe  $C^1$ , mais elles peuvent être lissées sans difficulté de manière à obtenir des stratifications  $C^2$  ayant les mêmes propriétés.

## 5. Ouverture de la projection

Ce qui précède permet de montrer aussi l'ouverture de la projection du cône normal sur  $Y$ . Pour voir cela montrons tout d'abord le résultat suivant ( $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \infty$  avec sa topologie usuelle).

LEMME 5.1. — Soient  $M$  et  $Y$  deux variétés différentielles,  $\mathcal{Z}$  un sous-ensemble de  $M$  et  $f$  une application continue de  $M$  dans  $Y$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f : \mathcal{Z} \rightarrow Y$  est ouverte,
- (ii) pour tout chemin continu  $h : \overline{\mathbb{N}} \rightarrow Y$ , le produit fibré  $\mathcal{Z}_h = \overline{\mathbb{N}} \times_h \mathcal{Z}$  est égal à l'adhérence de  $f_h^{-1}(\overline{\mathbb{N}} - \{\infty\})$ , où  $f_h$  est l'image réciproque de  $f$  par  $h$ ,  
et dans le cas sous-analytique ( $M, Y$  analytiques,  $f, \mathcal{Z}$  sous-analytiques,  $f$  propre),
- (ii') pour tout chemin analytique  $h : \mathbb{R} \rightarrow Y$ , le produit fibré  $\mathcal{Z}_h = \mathbb{R} \times_h \mathcal{Z}$  est égal à l'adhérence de  $f_h^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ .

*Démonstration.* — Montrons que (i) implique (ii). Supposons  $f$  ouverte. Soit  $\overline{\mathbb{N}} \xrightarrow{h} Y$  une suite dans  $Y$ . Si (ii) n'est pas satisfaite, alors il existe  $(\infty, z) \in \mathcal{Z}_h - f_h^{-1}(\overline{\mathbb{N}} - \{\infty\})$ , et un voisinage ouvert  $V$  de  $(\infty, z)$ , de la forme  $]n, \infty[ \times V_1$ , tel que  $V \cap f_h^{-1}(\overline{\mathbb{N}} - \{\infty\})$  soit vide. Comme  $f$  est ouverte,  $f(V_1)$  est un voisinage de  $f(z) = h(\infty)$  et rencontre  $h(\overline{\mathbb{N}})$ , ce qui signifie que  $V$  rencontre  $f_h^{-1}(\overline{\mathbb{N}} - \{\infty\})$ , donnant une contradiction.

Montrons que (ii) implique (i). Supposons  $f$  non ouverte : il existerait un ouvert  $U$  de  $\mathcal{Z}$  tel que  $f(U)$  ne soit pas ouvert. Soit  $h_n$  une suite de  $Y \setminus f(U)$  telle que  $h_n \rightarrow y \in f(U)$ ,  $f_h^{-1}(t)$  ne rencontre pas  $\overline{\mathbb{N}} \times U$  pour  $t \neq \infty$ , ce qui implique que l'adhérence de  $f_h^{-1}(\overline{\mathbb{N}} - \{0\})$  ne rencontre pas  $\overline{\mathbb{N}} \times U$ . Mais  $y = h(\infty) \in f(U)$ , et donc  $(\infty, y) \in (\overline{\mathbb{N}} \times U) \cap \mathcal{Z}_h$ , contredisant (ii).

Dans le cas sous-analytique, (i) implique (ii') avec la même démonstration. Pour l'implication inverse, il suffit de prendre  $U$  sous-analytique. Alors  $f(U)$  est sous-analytique, et on peut appliquer le lemme du chemin à son complémentaire pour trouver un chemin analytique  $h : \mathbb{R} \rightarrow Y$ , tel que  $h(0) = y$  et  $h(\mathbb{R} - \{0\}) \cap f(U) = \emptyset$ , et on termine de la même façon.  $\square$

PROPOSITION 5.2. — Sous les hypothèses du théorème 3.1, la projection de  $C_Y \mathcal{Z}$  dans  $Y$  est ouverte, i.e.  $\mathcal{Z}$  est normalement pseudo-plate le long de  $Y$ .

*Démonstration.* — Soit  $y_n$  une suite de points de  $Y$ , convergeant vers  $y \in Y$ . Et soit  $\gamma$  un chemin de classe  $C^1$  passant par les  $y_n$  et  $y = \gamma(0)$ , de classe  $C^k$  sur  $\gamma - \{0\}$ . On peut supposer que  $Im(\gamma)$ , que l'on notera aussi  $\gamma$ , est une sous-variété de  $Y$ . Soit  $v \in C_y(\mathcal{Z}_y)$ ,  $v = \lim_{i \rightarrow \infty} (\mu(x'_i y))$  avec  $x'_i \in \pi^{-1}(y)$ . En suivant les courbes intégrales données par le théorème 3.1 dans l'autre sens à partir de chaque  $x'_i$  on construit une double suite  $x_n^i$  de  $\mathcal{Z}_\gamma$ , telle que  $y_n = \pi(x_n^i)$ . Soit  $v_n^i = \mu(x_n^i \pi(x_n^i))$ . En extrayant des sous-suites des  $v_n^i$  successivement pour  $n$  croissant, on peut supposer que pour chaque  $n$ ,  $v_n^i$  tend vers  $c_n \in (C_Y \mathcal{Z})_{y_n} = C_{y_n}(\mathcal{Z}_{y_n})$  par le théorème 3.1. Par l'inégalité triangulaire,

$$\|c_n - v\| \leq \|c_n - v_n^i\| + \|v_n^i - \mu(x'_i y)\| + \|\mu(x'_i y) - v\|.$$

Fixons  $\epsilon > 0$ , et soit  $i_0$  tel que  $\|\mu(x'_{i_0} y) - v\| \leq \frac{\epsilon}{3}$ . La preuve du lemme 3.4 montre que  $\|v_n^i - \mu(x'_i y)\| \leq C(\|y_n\|^{1-e} - \|y\|^{1-e})$ , uniformément en  $i$ , et il est alors facile de

trouver  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $\|c_n - v_n^{i_0}\| < \frac{\epsilon}{3}$  et  $\|v_n^{i_0} - \mu(x'_{i_0}y)\| < \frac{\epsilon}{3}$ . On en déduit le résultat en utilisant la caractérisation (ii) du lemme précédent.  $\square$

**EXEMPLE 5.3.** — Reprenons l'exemple 4.3. Les stratifications obtenues sont  $(w_\beta)$ -régulières (donc  $(a)$ -régulières) et telles que la projection du cône normal n'est pas ouverte : comme nous l'avons vu les fibres du cône tangent le long de  $Y = (0y)$  sont des points sauf en 0, où la fibre est de dimension 1, et donc la projection ne peut pas être ouverte.

**REMARQUE 5.4.** —  $(a+n)$  n'implique pas  $(ppn)$ .

L'exemple précédent peut être modifié de sorte que la stratification obtenue soit  $(a)$ -régulière et que le cône normal soit obtenu dans la fibre en 0 de la projection sur  $Y$ .

En effet, centrons une suite de tumuli  $T_{m_i, m_i}$  aux points  $(m_i^2, 0)$  de l'axe  $(0x)$ , où  $m_i \rightarrow 0$  et les  $m_i$  soient tels que les tumuli ne se rencontrent pas. Notons encore  $X$  la surface obtenue, et  $Y = (0y)$ . Les tumuli donnent naissance à un cône tangent limite en 0 de dimension 1, provenant de suites de points situés sur l'axe  $(0x)$ . Les fibres du cône tangent le long de  $Y = (0y)$  sont encore des points sauf en 0, où la fibre est de dimension 1, et la projection n'est donc pas ouverte. La condition  $(a)$  est vérifiée - il suffit de constater que les normales limites en 0 sont dans le plan  $(0xz)$ .

G. Valette a observé comment construire un exemple semi-algébrique de stratification  $(a+n)$ -régulière ne vérifiant pas  $(ppn)$ . La surface, représentée dans sa partie  $z \geq 0$ , a l'aspect suivant :

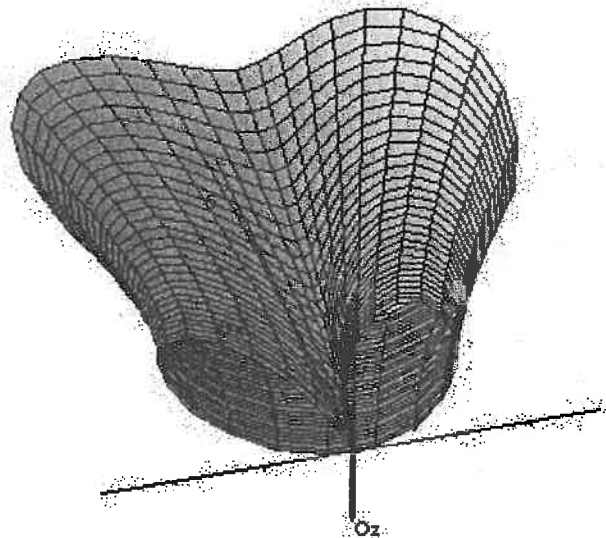


Figure 1

REMARQUE 5.5. —  $(a+ppn)$  n'implique pas  $(n)$ . On peut également se demander si  $(n)$  implique  $(ppn)$  pour une stratification semi-algébrique. La réponse est non - on obtient un exemple semi-algébrique  $\mathcal{Z}$  en pliant un demi-plan  $\{x = 0, z \geq 0\}$  dans une région cuspidale  $\{y^2 \leq z^3\}$  orthogonal à  $Y = (0y)$ , tel que  $C_0\mathcal{Z}_0$  soit un segment et pour  $y \neq 0$  la fibre de  $C_Y\mathcal{Z}$  en  $(0, y, 0)$  soit un point. Cet exemple n'est pas  $(a)$ -régulier. G. Valette nous a communiqué l'exemple algébrique réel suivant, vérifiant  $(a+n)$  sans vérifier  $(ppn)$  : il suffit de poser  $\mathcal{Z} = \{y^2 = z^2x^2 + x^3\}$  et  $Y = (Oz)$  !

### Références

- [1] K. Bekka, *Sur les propriétés topologiques des espaces stratifiés*, Thèse, Université de Paris-Sud, Orsay (1988).
- [2] K. Bekka et D. Trotman, *Weakly Whitney stratified sets*, Real and Complex singularities (eds. J. W. Bruce, F. Tari), Chapman and Hall Research Notes in Math, **412** (2000), 1–15.
- [3] H. Brodersen et D. Trotman, *Whitney (b)-regularity is strictly weaker than Kuo's ratio test for real algebraic stratifications*, Math. Scand., **45** (1979), 27–34.
- [4] G. Comte, *Densité et images polaires en géométrie sous-analytique*, Thèse, Université de Provence (1998).
- [5] G. Comte, *Equisingularité réelle: nombres de Lelong et images polaires*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure de Paris, à paraître.
- [6] M. Ferrarotti, E. Fortuna et L. Wilson, *Real algebraic varieties with prescribed tangent cones*, Pacific J. of Math., **194** (2000), 315–323.
- [7] C. G. Gibson, *Construction of canonical stratifications*, Topological stability of smooth mappings, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, New York, **552** (1976), 9–34.
- [8] J.-P. Henry et M. Merle, *Limites de normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka*, Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981), Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. **40** (1983), 575–584.
- [9] J.-P. Henry et M. Merle, *Stratifications de Whitney d'un ensemble sous-analytique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I **308** (1989), 357–360.
- [10] H. Hironaka, *Normal cones in analytic Whitney stratifications*, Publ. Math. I.H.E.S., **36** (1969), 127–138.
- [11] A. Kambouchner et D. Trotman, *Whitney (a)-faults which are hard to detect*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 4ème série, **12** (1979), 465–471.
- [12] T.-C. Kuo, *The ratio test for analytic Whitney stratifications*, Proc. of Liverpool Singularities Symposium I (C.T.C. Wall, ed.), Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, New York, **192** (1971), 141–149.
- [13] M. Kwieciński et D. Trotman, *Scribbling continua in  $\mathbb{R}^n$  and constructing singularities with prescribed Nash fibre and tangent cone*, Topology and its Applications, **64** (1995), 177–189.

- [14] P. Orro et D. Trotman, *Sur les fibres de Nash de surfaces à singularités isolées*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **299** (1984), 397–399.
- [15] P. Orro et D. Trotman, *On the regular stratifications and conormal structure of subanalytic sets*, Bulletin of the London Mathematical Society, **18** (1986), 185–191.
- [16] P. Orro et D. Trotman, *Cône normal à une stratification régulière*, Seminari Geometria 1998-99, Università degli Studi Bologna, **12** (2000), 169–175.
- [17] B. Teissier, *Variétés polaires II: Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*, in Algebraic Geometry, Proc., La Rabida 1981, Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, New York, **961** (1982), 314–491.
- [18] D. Trotman, *Counterexamples in stratification theory : two discordant horns*, Real and Complex Singularities (Proc. 9th Nordic Summer School, Oslo 1976, ed. P. Holm), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, (1977), 679–686.
- [19] D. Trotman, *Transverse transversals and homeomorphic transversals*, Topology, **24** (1985), 25–39.
- [20] J.-L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Inventiones Math., **36** (1976), 295–312.



## Recent Newton Institute Preprints

- NI00010-SCE **V Zlatic and J Freericks**  
*Theory of valence transitions in Ytterbium-based compounds*
- NI00011-ERN **A Iozzi and D Witte**  
*Cartan-decomposition subgroups of  $SU(2,n)$*
- NI00012-ERN **D Witte and L Lifschitz**  
*On automorphisms of arithmetic subgroups of unipotent groups in positive characteristic*
- NI00013-ERN **D Witte**  
*Homogeneous Lorentz manifold with simple isometry group*
- NI00014-SGT **R Uribe-Vargas**  
*Global theorems on vertices and flattenings of closed curves*
- NI00015-SGT **EA Bartolo, P Cassou-Nogués, I Luengo et al**  
*Monodromy conjecture for some surface singularities*
- NI00016-SGT **IG Scherbak**  
*Boundary singularities and non-crystallographic Coxeter groups*
- NI00017-SGT **K Houston**  
*On the classification and topology of complex map-germs of corank one and  $A_e$ -codimension one*
- NI00018-SGT **PJ Topalov and VS Matveev**  
*Geodesic equivalence via integrability*
- NI00019-GTF **S Friedlander**  
*On vortex tube stretching and instabilities in an inviscid fluid*
- NI00020-SGT **VD Sedykh**  
*Some invariants of admissible homotopies of space curves*
- NI00021-SGT **IA Bogaevsky**  
*Singularities of linear waves in plane and space*
- NI00022-SGT **S Izumiya**  
*Generating families of developable surfaces in  $R^3$*
- NI00023-SGT **S Izumiya and N Takeuchi**  
*Special curves and ruled surfaces*
- NI00024-GTF **S Friedlander and A Shnirelman**  
*Instability of steady flows of an ideal incompressible fluid*
- NI00025-SGT **M Saito, T Takebe and H Terajima**  
*Deformation of Okamoto-Painlevé pairs and Painlevé equations*
- NI00026-GTF **AA Himonas and G Misiulek**  
*A priori estimates for higher order multipliers on a circle*
- NI00027-SGT **P Orro and D Trotman**  
*Cône normal et régularités de Kuo-Verdier*

